Riassunto. Viene studiata la geometria subunitaria (nel senso di [P1]) del simbolo $\xi_1^2 + (x_1\xi_2 - Mb)^2$. Si mostra l'esistenza di una "stratificazione" della geometria e si determina un raggio "critico" ρ_{cr}, dipendente dal centro $\gamma^0 \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ della palla subunitaria, tale che se $\rho \leq \rho_{cr}/3$ o $\rho \geq 3\rho_{cr}$ allora $B_p(\gamma^0, \rho)$ e' essenzialmente un rettangolo.

Abstract. The subunit geometry (introduced in [P1]) of the symbol $\xi_1^2+(x_1\xi_2-Mb)^2$ is studied. The existence of a "stratification" of the geometry is shown and a "critical" radius ρ_{cr} is determined, depending on the center $\gamma^0 \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ of the subunit ball, such that if $\rho \leq \rho_{cr}/3$ or $\rho \geq 3\rho_{cr}$, $B_p(\gamma^0, \rho)$ is essentially a box.

Illustrero' in queste pagine un fenomeno di stratificazione della geometria sub-unitaria tipico del caso pseudodifferenziale, senza precedenti nel caso differenziale. Daro' percio' l'esempio di un simbolo pseudodifferenziale per il quale per ogni fissato centro (x^0, ξ^0) della palla subunitaria esiste un particolare raggio critico ρ_{cr} tale che la palla subunitaria $B_p\big((x^0, \xi^0), \rho\big)$ non e' comparabile ad un rettangolo per $\rho \sim \rho_{cr}$.
Nella prima parte microlocalizzero' il simbolo alle classi $S^2(1 \times M)$ (si veda [F], [P1], [P2] per un richiamo delle definizioni e termini, proprieta' ed enunciati), nella seconda descrivero' la geometria nel regime di transizione e nel terzo determinero' il raggio critico. L'esistenza di questo esempio prova che il Teorema di Struttura 5.20 di [P1] e' ottimale.
L'esistenza di un numero limitato a priori di raggi critici e' congetturata in [P3], lavoro al quale rimando il lettore interessato ai dettagli di quanto detto nel seguito.

L'esempio e riduzione alle classi $S^2(1 \times M)$.

Sia $\{Q_\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}$ una partizione di $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ in blocchi disgiunti, con centro di $Q_\nu = (x^\nu, \xi^\nu)$, tali che

$$\mathrm{diam}_x Q_\nu \sim 1, \quad \mathrm{diam}_\xi Q_\nu \sim \frac{1}{4}(1 + |\xi^\nu|),$$

e

$$\sum_\nu \chi_{10^3 Q_\nu} \leq C_*,$$

dove $C_* > 0$ e' una costante assoluta, χ_Q e' la funzione caratteristica dell'insieme Q e $10^3 Q$ e' il dilatato di Q, tenuto fisso il centro, del fattore 10^3.

Ricordiamo che se $M >> 1$, $0 < \delta \leq 1$, $m \in \mathbf{R}$, diciamo che una funzione $p \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ e' un simbolo di $S^m(\delta \times M\delta)$ se

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(M\delta^2)^m \delta^{-|\alpha|}(M\delta)^{-|\beta|}, \ \forall \alpha, \beta, \forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Sia allora ξ_2^0 un particolare punto di $\mathbf{R}$, scelto in $\{\pi_{\xi_2}(\xi^\nu)\}_{\nu \in \mathbf{Z}}$, con $|\xi_2^0| >> 1$. Sia poi $\tilde{\alpha} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ con $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 1$, $\tilde{\alpha} \equiv 1$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \leq C|\xi_2^0|$, $\tilde{\alpha} \equiv 0$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \geq 2C|\xi_2^0|$ ($C \geq 1$ e' una costante assoluta).

Sia $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ definita da

$$\alpha(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{|\xi_2^0|}}\tilde{\alpha}(\xi_2),$$

e sia

$$Q = \{(x,\xi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2;\ |x_1|, |x_2| \leq 1, |\xi_1| \leq \frac{1}{10}|\xi_2^0|, |\xi_2 - \xi_2^0| \leq \frac{1}{10}|\xi_2^0|\}.$$

(Si noti che $\xi_2 \in \pi_{\xi_2}(Q) \Longrightarrow |\xi_2| \sim |\xi_2^0|$.)

Pongo $M := |\xi_2^0|/10$. Sia anche $\beta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che $\beta \equiv 1$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \geq C|\xi_2^0|$, e $\beta \equiv 0$ per $|\xi_2 - \xi_2^0| \leq C|\xi_2^0|/2$. Notiamo che $Q \subset Q_{\nu_0}$, dove centro$(Q_{\nu_0}) = (0,0,0,\xi_2^0)$.

Definisco allora il simbolo pseudodifferenziale di $S^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$

$$p(x,\xi) = \xi_1^2 + \big(x_1 x_2 - \alpha(\xi_2)\big)^2 \xi_2^2 + \beta(\xi_2)\sqrt[4]{\xi_2^2 + 1}.$$

E' allora chiaro che p e' un simbolo pseudodifferenziale ≥ 0 e subellittico (al quale verra' occasionalmente associato l'operatore pseudodifferenziale (ψdo) secondo il Calcolo Classico o il Calcolo di Weyl. Si veda ad esempio [P2]). Inoltre su un grande dilatato Q^{**} di Q si ha:

$$p_{|Q^{**}}(x,\xi) \in S^2(1 \times M).$$

Sia ora $\Phi: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ la trasformazione canonica definita da

$$\Phi: (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \longmapsto \Big(x_1, \frac{\xi_2 - \xi_2^0}{M}, \xi_1, M x_2\Big) = (y, \eta).$$

Si ha, con

$$\hat{Q} = \Phi(Q) = \{(y,\eta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2;\ |y_1|, |y_2| \le 1, |\eta_1|, |\eta_2| \le M\},$$

che Φ e' un diffeomorfismo simplettico **tame** (si veda [F] o [P2]) su Q, che

$$p(x,\xi) \sim \xi_1^2 + M^2(x_1x_2 - b)^2 \quad \text{su } Q \quad \text{e che}$$

$$(p \circ \Phi^{-1})(y,\eta) = \eta_1^2 + (x_1\eta_2 - Mb)^2 \quad \text{su } \hat{Q},$$

infatti su un dilatato di $\hat{Q}$, con $b \sim M^{-1/2}$.

Dal punto di vista operatoriale si ha la cosa seguente. Se F_Φ e' l'operatore integrale di Fourier la cui relazione canonica e' il grafico di Φ, si ha, per lo "Sharp Egorov Principle" (si veda [F] o [F-Ph]), che

$$\mathrm{Re}\Big(F_\Phi^* \circ ((\chi^2 p) \circ \Phi^{-1})(y, D_y) \circ F_\Phi u, u\Big) = \mathrm{Re}\Big((\chi^2 p)(x, D_x)u, u\Big) + O(\|u\|^2),$$

dove $\chi \in C_0^\infty(\mathrm{int}Q^*)$ e $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

L'esempio la cui geometria subunitaria verra' studiata al variare del raggio ρ sara' quindi (usando le precedenti notazioni e dopo aver esteso p a tutto $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ in modo che risulti $p \in S^2(1 \times M)$, si veda a riguardo [P1]):

$$p(x,\xi) = \xi_1^2 + (x_1\xi_2 - Mb)^2$$

su Q, blocco centrato in $(0,0) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, di dimensioni $1 \times M$, con $1 >> b \ge cM^{(\varepsilon-2)/2}$ (ε e' l'esponente di subellitticita').

La "Stratificazione".

Ricordo che se $0 \leq p \in S^2(Q)$ diro' che $q \in C_0^2(\mathrm{int}Q^{**})$ e' un simbolo subunitario per p ($q \in \mathcal{S}(p, Q)$), se

$$(i) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(\mathrm{diam}_x Q)^{1-|\alpha|}(\mathrm{diam}_\xi Q)^{1-|\beta|}, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2;$$

$$(ii) \qquad q(x,\xi)^2 \leq p(x,\xi), \quad \forall (x,\xi) \in Q^{**}.$$

$H_q(x,\xi)$ (il campo Hamiltoniano associato a q) e' detto *campo vettoriale subunitario,* e se $\Gamma(t; x^0, \xi^0)$ e' una *traiettoria spezzata subunitaria,* $\Gamma(0, x^0, \xi^0) = (x^0, \xi^0)$ (e cioe' $\dot{\Gamma}$ e' definita da una famiglia di H_q, $q \in \mathcal{S}(p, Q)$), si definisce

$$B_p\big((x^0, \xi^0), 1\big) = \{(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n;\ \exists \Gamma \text{ come sopra con } (x,\xi) = \Gamma(1, x^0, \xi^0)\};$$

e, per $0 < \rho \leq 1$,

$$B_p\big((x^0, \xi^0), \rho\big) := B_{\rho^2 p}\big((x^0, \xi^0), 1\big).$$

Rimando a [P1], [P2] o [P3] per le principali proprieta' degli oggetti sopra definiti.

Definizione. *Un sottoinsieme* $R \subset Q$, *blocco di dimensioni* $1 \times M$, *tale che* $R = I \times B$, *con* $I \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ *e' definito essere una* **good band** *per* $0 \leq p \in S^2(Q)$ *([P1] o [P3]) se*

$$\mathrm{diam}(I) \sim \mathrm{diam}_{x_1}(Q), \ \mathrm{diam}_{x_2}(B) \sim \delta, \ \mathrm{diam}_\xi(B) \sim M\delta,$$

e, $\forall (x,\xi) \in R$,

$$p(x,\xi) = \xi_1^2 + \delta^2 e(x,\xi)\big(\xi_2 - M\delta b(x_1, x_2)\big)^2 + (M\delta^2)^2 V(x_1, x_2),$$

con $e \in S^0(1 \times \delta \times M\delta)$, $e > 0$ *ellittico, i.e.* $e \sim 1$, $M\delta^2 b \in S^1(1 \times \delta \times M\delta)$, $0 \leq (M\delta^2)^2 V \in S^2(1 \times \delta \times M\delta)$.[1]

In [P3] viene dimostrata, nelle ipotesi di subellitticita', l'esistenza di una tale regione R. (Si veda [P3] per una descrizione della geometria associata ad R.)

Siano

$$\bar{p}_1(x_2, \xi_2) = \frac{1}{2} \int_{x_1^0 - 1}^{x_1^0 + 1} p_1(x_1, x_2, \xi_2) dx_1, \qquad p_1^*(x_2, \xi_2) := \Big(\frac{|\xi_1^0|}{M}\Big)^4 M^2 + \bar{p}_1(x_2, \xi_2).$$

Descrivo ora $B_p\big((x^0, \xi^0), 1\big)$ con $(x^0, \xi^0) = (\mu, 0, 0, 0)$, $1 \geq \mu > 0$, per una opportuna scelta di μ. Se I e' un intervallo, $I \subset \pi_{x_1}(Q)^*$, tale che $|I| \sim 1$, $0 \notin I$, e $x_1 \in I \Longrightarrow |x_1| \sim 1$, allora in questo caso $R = I \times \pi_{(x_2, \xi)}(Q)$. Siano $\bar{b} := \mathrm{Av}_{x_1 \in I}(b/x_1)$ e $\bar{b^2} := \mathrm{Av}_{x_1 \in I}(b^2/x_1^2)$. Allora ξ potra' muoversi, usando i campi subunitari associati ad R, di una quantita'

$$\sim M\Delta_0 = |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\bar{b}| + M\sqrt{\bar{b^2} - \bar{b}^2} \sim Mb.$$

Percio' B_p conterra' sicuramente una regione di dimensioni $1 \times M\Delta_0$. Inoltre, poiche' $p(x, \xi) \lessapprox \xi_1^2 + \bar{p}_1(x_2, \xi_2)$, si ha immediatamente

$$B_p \subset \{(x, \xi);\ |x - x^0| \lessapprox 1, |\xi - \xi^0| \lessapprox Mb^{1/2}\}.$$

Si opera ora una decomposizione di C.Z. $\{Q_\nu\}_\nu$ di Q (si veda [P2]) relativamente a $p_1(x, \xi_2)$, con condizione di stop:

$$\mathrm{diam}_x Q_\nu \sim \Delta_0.$$

---

[1] Dico che

$$p(x_1, x', \xi') \in S^m(\delta_1 \times \delta_2 \times M\delta_2) \Longleftrightarrow |\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\gamma p(x_1, x', \xi')| \leq C_{\alpha\beta\gamma}(M\delta_2^2)^m \delta_1^{-\alpha} \delta_2^{-|\beta|}(M\delta_2)^{-|\gamma|}.$$

Se $\delta_\nu = \mathrm{diam}_x(Q_\nu)$, si ottengono, considerando i Q_ν tali che $\{(x,\xi);\ x_2 = 0, \xi = 0\} \cap Q_\nu \neq \emptyset$ e tralasciando i blocchi di indeterminazione, tre classi di blocchi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, tali che:

(i) $Q_\nu \in \mathcal{B}_1 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' ellittico (cosicche' si ha $\delta_\nu \sim b^{1/2}$);

(ii) $Q_\nu \in \mathcal{B}_2 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato e $b^{1/2} \leq \delta_\nu \leq 1$;

(iii) $Q_\nu \in \mathcal{B}_3 \iff p_{1|Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato e $\delta_\nu \sim 1$.

Notiamo che se x_1 aumenta da 0 a 1, si passa da blocchi appartenenti a $\mathcal{B}_1$ a blocchi appartenenti a $\mathcal{B}_2$, e a $\mathcal{B}_3$, da cui segue

$$Q_\nu \in \mathcal{B}_i,\ Q_\mu \in \mathcal{B}_j,\ i < j \Longrightarrow \pi_\xi(Q_\nu) \subset \pi_\xi(Q_\mu).$$

D'altra parte l'intervallo permesso a ξ in Q_ν (i.e. usando

$$p^\sharp(x,\xi) = (\mathrm{diam}_x Q_\nu)^2 \xi_1^2 + p_1(x,\xi_2) \lessapprox p(x,\xi)$$

poiche' $\xi_1 \in Q_\nu \Longrightarrow |\xi_1| \lessapprox M\delta_\nu$) e' $M\delta_\nu\sigma(\nu) := Mb/\delta_\nu$ (notiamo che $M\delta_\nu\sigma(\nu) \sim Mb/\sqrt{x_1^2 + b^2}$ per $|x_1| \sim \delta_\nu$) e si ha che

$$M\delta_\nu\sigma(\nu) \gtrapprox M\delta_\mu\sigma(\mu) \gtrapprox M\delta_\gamma\sigma(\gamma)$$

per $Q_\nu \in \mathcal{B}_1$, $Q_\mu \in \mathcal{B}_2$, $Q_\gamma \in \mathcal{B}_3$ rispettivamente. Sia Q_0 il blocco contenente γ^0. Operando una scelta di μ (in modo tale che il tempo necessario per raggiungere blocchi Q_ν nei quali ci si puo' muovere nella direzione ξ con la migliore velocita' a disposizione sia ~ 1, e rimanga cosi' un tempo arbitrariamente piccolo, quindi insufficiente per raggiungere punti "sopra" (x^0,ξ^0), i.e. punti del tipo (x^0,ξ), con $|\xi|$ il massimo possibile) si ottiene la "stratificazione"

$$B_p\big((x^0,\xi^0),1\big) \subset \bigcup_{\nu=1}^{\nu_{max}} B_\nu,$$

dove $\{1, 2, \ldots, \nu_{max}\} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ e

$$\text{diam}_\xi \pi_\xi(B_i) >> \text{diam}_\xi \pi_\xi(B_j) >> \text{diam}_\xi \pi_\xi(B_k)$$

per $i \in \mathcal{N}_1$, $j \in \mathcal{N}_2$, $k \in \mathcal{N}_3$. Poiche' $(x^0, \xi^0) \in B_\nu$ per un certo $\nu \in \mathcal{N}_3$, e punti di B_ν, $\nu \in \mathcal{N}_1$ e $\xi-$altezza [2] massima possono essere raggiunti, si ottiene che la palla subunitaria risulta essere "stratificata" nel suddetto senso.

[2] Qui ed oltre definisco la $\xi-$altezza essere la distanza piu' grande da ξ^0 ottenibile lungo traiettorie subunitarie nello spazio $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$.

Determinazione di ρ_{cr}.

Vogliamo ora provare che, considerando la palla subunitaria al variare del raggio ρ, esiste un raggio critico ρ_{cr}, dipendente dal centro (x^0, ξ^0), tale che per $\rho \leq c\rho_{cr}$ e per $\rho \geq C\rho_{cr}$ ($c, C > 0$ costanti assolute) $B_p(\gamma^0, \rho)$ e' essenzialmente un rettangolo. Notiamo che per ogni fissato centro (x^0, ξ^0) il numero di tali ρ_{cr} e' limitato a-priori. Useremo le seguenti notazioni: $I_\rho = I_\rho(x_1^0) = [x_1^0 - \rho, x_1^0 + \rho]$, e

$$\bar{p}_\rho(x_2, \xi_2) := \big(\mathrm{Av}_{x_1 \in I_\rho} p_1\big)(x_2, \xi_2).$$

Considero allora, sul blocco Q di dimensioni $1 \times M$, centrato in $(0,0)$, l'operatore $\rho^2 p(x, \xi)$.

Assumo di essere nella seguente situazione (si veda l'ipotesi $(A2\nu)$ di [P3]):

$$\rho_{min} < \rho < \rho_{max}. \tag{1}$$

D'altra parte, considerando $\rho^2 p$ su Q, si ha che la decomposizione di C.Z. si ferma a $Q_\nu \subset Q$ o perche' $\rho^2 p_{|Q_\nu}$ e' ellittico o perche' $\rho^2 p_{|Q_\nu}$ e' nondegenerato.

Se $\gamma^0 \in Q_\nu$, blocco sul quale $\rho^2 p_{|Q_\nu}$ e' ellittico, la palla e' un rettangolo, percio' considerero' solo il caso in cui $\rho^2 p_{|Q_\nu}$ e' nonellittico-nondegenerato.

Poiche' $\rho^2 p(x, \xi) = \rho^2 \xi_1^2 + \rho^2 p_1(x, \xi_2)$, la nondegeneratezza-nonellittica si verifichera' su un blocco Q_ν tale che dimensioni$(Q_\nu) \sim \rho \times M\rho$. Abbiamo cosi' la seguente prima condizione: supponiamo che $\gamma^0 \in Q_\nu$, con $\rho^2 p_{|Q_\nu}$ nonellittico-nondegenerato, allora si ha $\rho^2 p(\gamma^0) \leq CM^2\rho^4$, i.e.

$$\rho \geq \sigma(\gamma^0) := \Big(\frac{|\xi_1^0|^2}{M^2} + |\mu \frac{\xi_2^0}{M} - b|^2\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

da cui, se $\rho \lesssim \sigma(\gamma^0)$, oppure $\rho \sim \sigma(\gamma^0)$, la palla e' un rettangolo. Infatti, poiche'

$M^2\sigma(\gamma^0)^2 = p(\gamma^0)$ e $\rho \lessapprox \sigma(\gamma^0)$ (o $\rho \sim \sigma(\gamma^0)$) implica

$$\rho^2 p(\gamma^0) \le CM^2\rho^4 = C\rho^2 M^2\rho^2 \le C'\rho^2 M^2\sigma(\gamma^0)^2 \sim \rho^2 p(\gamma^0),$$

si ha che $\rho^2 p(\gamma^0)$ e' comparabile al massimo di $\rho^2 p$ sul blocco Q_ν di dimensioni $\rho \times M\rho$. Poiche' $\rho^2 p$ e' un polinomio, da cio' segue che la palla e' un rettangolo. Per $\rho \ge \rho_0 = \sigma(\gamma^0)/C^{1/2}$, si considera una decomposizione di C.Z. relativa a $p^*_\rho(x_2, \xi_2)$. In questo caso

$$p^*_\rho(x_2,\xi_2) = \rho^2\bar{p}_\rho(x_2,\xi_2) + (\frac{|\xi_1^0|}{M})^4 M^2 = \tag{3}$$

$$= \rho^2\big(\mu\xi_2 - Mb\big)^2 + \frac{1}{3}\rho^4\xi_2^2 + (\frac{|\xi_1^0|}{M})^4 M^2 =$$

$$= \rho^2(\mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2)\big(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2}\big)^2 + \frac{M^2b^2\rho^4}{3(\mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2)} + (\frac{|\xi_1^0|}{M\rho})^4 M^2\rho^4.$$

Considero

$$\partial^2_{\xi_2} p^*_\rho(x_2,\xi_2) \equiv 2\rho^2\sigma(\mu,\rho), \quad \partial^2_{x_2} p^*_\rho \equiv 0, \tag{4}$$

dove $\sigma(\mu,\rho) := \mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2$.

Si hanno allora i seguenti casi:

(i) $\partial^2_{\xi_2} p^*_\rho \sim \rho^4$ in caso $|\mu| \le \rho$;

(ii) $\partial^2_{\xi_2} p^*_\rho \sim \rho^2\mu^2$ in caso $\rho \le |\mu|$.

Nel caso (i)

$$p^*_\rho(x_2,\xi_2) \sim \rho^4\big(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + \big\{\frac{b^2}{\rho^2} + (\frac{|\xi_1^0|}{M\rho})^4\big\}(M\rho^2)^2.$$

Nel caso (ii)

$$p^*_\rho(x_2,\xi_2) \sim \rho^2\mu^2\big(\xi_2 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + \big\{\frac{b^2}{\mu^2} + (\frac{|\xi_1^0|}{M\rho})^4\big\}(M\rho^2)^2.$$

Ricordo che stiamo supponendo che $\rho^2 p$ (e quindi p^*_ρ) possa essere localizzato a $Q_\nu \ni \gamma^0$, dimensioni$(Q_\nu) \sim \rho \times M\rho$. Allora dev'essere, nel caso (i):

$$\frac{b^2}{\rho^2} + (\frac{|\xi_1^0|}{M\rho})^4 := G_1(\rho) \leq C_1;$$

nel caso (ii):

$$\frac{b^2}{\mu^2} + (\frac{|\xi_1^0|}{M\rho})^4 := G_2(\rho) \leq C_1,$$

dove $C_1 > 0$ e' una costante assoluta.

Percio', se $G_1(\rho) \geq C_2$, per un'altra costante assoluta $C_2 > 0$, si ha nel caso (i) che p^*_ρ e' ellittico e la palla e' una rettangolo; se $G_2(\rho) \geq C_2$, di nuovo si ha ellitticita' di p^*_ρ. Lo stesso vale nel caso (ii).

(Osservo che se $G_1(\rho) \leq C_1$, allora si ha che o $b^2/\rho^2 \leq C_1/2$, o $(|\xi_1^0|/(M\rho))^4 \leq C_1/2$, oppure entrambi; lo stesso vale per $G_2(\rho) \leq C_1$. Riguardo $G_1(\rho) \geq C_2$, si ha che almeno uno tra b^2/ρ^2 e $(|\xi_1^0|/(M\rho))^4$ e' maggiore o uguale a $C_2/2$.)

Ad ogni modo, le condizioni su G_1 e G_2 determinano un intervallo di valori per ρ. Ora **suppongo** che

$$\frac{1}{3}|\mu| \geq \rho_0$$

ed esamino i seguenti casi:

$$(5) \qquad |\mu| \leq \rho, \ \ \rho \in \{\rho \in \mathbf{R}_+; \ G_1(\rho) \leq C_1\} := S(G_1)$$

(nel caso $S(G_1) \cap [|\mu|, \rho_{max}] \neq \emptyset$);

$$(6) \qquad \rho \in [\rho_0, |\mu|] \cap S(G_2)$$

(nel caso in cui l'intersezione sia non-vuota).

Nel caso (5) p^*_ρ e' nondegenerato alla scala $\sim \rho^2 \times M\rho^2$ su un blocco $Q^2_{\nu_0}$, $\gamma^0_2 \in Q^2_{\nu_0}$. p^*_ρ puo' essere ellittico o nonellittico-nondegenerato su $Q^2_{\nu_0}$. Essendo localizzabile

a $Q^2_{\nu_0}$, si ha che

$$p^*_\rho(\gamma_2^0) \sim \rho^4 \big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + G_1(\rho)(M\rho^2)^2 \leq C(M\rho^4)^2,$$

i.e.

(7)
$$H_1(\rho) := \frac{1}{\rho^4}\big(\frac{\xi_2^0}{M} - \frac{b\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + \frac{G_1(\rho)}{\rho^4} \leq C.$$

Se p^*_ρ e' ellittico su $Q^2_{\nu_0}$, la palla e' un rettangolo; se e' nonellittico-nondegenerato, allora, in ogni caso, lo e' per

$$\rho \in C_1 := [|\mu|, \rho_{max}] \cap S(G_1) \cap S(H_1)$$

(un insieme eventualmente vuoto). Poiche' C_1 e' intersezione di insiemi di livello di funzioni razionali di ρ, quozienti di polinomi di grado limitato a-priori (indipendente da γ^0 e b), si ha che C_1 e' costituito da un numero limitato a-priori di componenti connesse.

Lo stesso vale nel caso (6), ed e' cosi' possibile ottenere una condizione sulla corrispondente $H_2(\rho)$:

$$p^*_\rho(\gamma_2^0) \sim \rho^2\mu^2 \big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + G_2(\rho)(M\rho^2)^2 \leq C\big(M(\rho\mu)^2\big)^2,$$

da cui segue

(8)
$$H_2(\rho) := \frac{1}{(\rho\mu)^2}\big(\frac{\xi_2^0}{M} - \frac{b\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\big)^2 + \frac{G_2(\rho)}{\mu^4} \leq C,$$

e la condizione

$$\rho \in C_2 := [\rho_0, |\mu|] \cap S(G_2) \cap S(H_2)$$

(un insieme eventualmente vuoto). Come C_1, C_2 consiste di un numero limitato a-priori di componenti connesse. (Nel caso sia $p^*_\rho(\gamma_2^0) \sim M^2(\rho\mu)^4$, si ha che la palla e' un rettangolo poiche' si avrebbe che in $(\bar{x}_1, x_2^0; \xi^0)$, per un certo $\bar{x}_1 \in I_\rho$, il

polinomio $\rho^2 p_1(x,\xi_2) + (|\xi_1^0|/M)^4 M^2$ sarebbe comparabile al suo massimo su un blocco di dimensioni $\rho|\mu| \times M\rho|\mu|$.)

Ora distinguo i seguenti casi:

$$\rho \in [\rho_0, \frac{1}{3}|\mu|] \cap C_2; \tag{9}$$

$$\rho \in (C_2 \cap [\frac{1}{3}|\mu|, |\mu|]) \cup (C_1 \cap [|\mu|, 3|\mu|]); \tag{10}$$

$$\rho \in [3|\mu|, \rho_{max}] \cap C_1 \tag{11}$$

(nel caso in cui questi insiemi siano non vuoti).

CASO (9). Considero una decomposizione di C.Z. relativa a $\rho^2 p_1(x,\xi_2)$. Sia Q_ν il blocco di C.Z. per il quale vale $\gamma_2^0 \in \pi_{(x_2,\xi_2)}(Q_\nu)$.

Poiche' $\partial_{\xi_2}^2(\rho^2 p_1) = 2\rho^2 x_1^2$, la "good band" R in questo caso ha dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$. Sia $M\rho|\mu|\Delta_0$ la "ξ−altezza" data da R. La condizione di stop per la localizzazione di $\rho^2 p_1$ in questo caso e': $(\mathrm{diam}_x Q_\nu) \sim \Delta_0\rho|\mu|$.

Da $I_\rho \subset [\frac{2}{3}\mu, \frac{4}{3}\mu]$ (possiamo supporre $\mu > 0$, come faremo d'ora in poi) segue che $\rho^2 p_1(x,\xi_2) \sim \rho^2\mu^2\big(\xi_2 - M(b/x_1)\big)^2$ su R e $\forall x_1 \in I_\rho$, da cui

$$M\rho\mu\Delta_0 = |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\bar{b}| + M\rho\mu\big(\bar{b^2} - \bar{b}^2\big)^{1/2}, \tag{12}$$

dove ora $\bar{b^2} := \mathrm{Av}_{x_1\in I_\rho}(b^2/x_1^2)$ e $\bar{b} := \mathrm{Av}_{x_1\in I_\rho}(b/x_1)$. Per avere informazioni sui blocchi di C.Z. relativi a $\rho^2 p_1$ considero la regione

$$W = \{(x,\xi);\ |x_1 - x_1^0| \le \rho, |x_2 - x_2^0| \le c\rho\mu, |\xi - \xi^0| \le c\Delta_0 M\rho\mu\} \tag{13}$$

dove $c > 0$ e' una costante assoluta (notiamo che $\pi_{(x_2,\xi_2)}(W) \subset Q_{\nu_0}^{2**}$). Sia poi

$$N = \{\nu;\ Q_\nu \cap W \neq \emptyset,\ \mathrm{diam}_x Q_\nu \gtrsim \rho\mu\Delta_0\}.$$

(Notiamo che $\pi_{x_1}(Q^{\natural}_\nu \cap W)$ contiene un intervallo di diametro $\sim \delta_\nu$.)

Ora mostro che:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi);\ |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho|\mu|, |\xi - \xi^0| \leq M\rho|\mu|\},$$

oppure

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx W.$$

In entrambi i casi, la palla e' un rettangolo.

Suppongo che, per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ *sia ellittico.* Allora si ha che

$$\partial^2_{\xi_2}(\rho^2 p_{1|Q_\nu}) = 2\rho^2 x_1^2 \leq C\delta_\nu^2,$$

da cui segue, essendo $|x_1| \sim |\mu|$ su $Q_\nu \cap W$, $\delta_\nu \gtrsim \rho|\mu|$.

D'altra parte e' $p_\rho^*(x_2, \xi_2) \leq CM^2\rho^4\mu^4$, per cui, poiche' $\bar{p}_\rho(x_2, \xi_2) \gtrsim M^2\delta_\nu^4$ per $(x_2, \xi_2) \in \pi_{(x_2,\xi_2)}(Q_\nu \cap W)$, si ha $\delta_\nu \sim \rho|\mu|$.

Allora Q_ν ha dimensioni $\sim \rho\mu \times M\rho\mu$. Sia ora $W_\nu = Q^{\natural}_\nu \cap R$, e sia $\bar{\xi}_2 \in \pi_{\xi_2}(W_\nu)$. Si ha che $p_\rho^*(x_2, \bar{\xi}_2) \sim M^2(\rho\mu)^4$, e che, scrivendo $R^2 = \pi_{(x_2,\xi_2)}(R)$,

$$\max_{(x_2,\xi_2)\in R^2} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim M^2(\rho\mu)^4.$$

D'altra parte si ha:

$$\max_{(x_2,\xi_2)\in R^2} p_\rho^*(x_2, \xi_2) \sim \tag{14}$$

$$\sim \rho^2\mu^2\Big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)} + c\Delta_0 M\rho\mu\Big)^2 + \rho^2\mu^2\Big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)} - c\Delta_0 M\rho\mu\Big)^2 + V(\mu,\rho)M^2(\rho\mu)^4 \sim$$

$$\sim \rho^2\mu^2\Big\{\Big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\Big)^2 + c^2\Delta_0^2 M^2(\rho\mu)^2\Big\} + V(\mu,\rho)M^2(\rho\mu)^4 \sim M^2(\rho\mu)^4,$$

dove si e' posto $V(\mu,\rho) := b^2/\big(\mu^4(\mu^2 + \frac{1}{3}\rho^2)\big) + (|\xi_1^0|/(M\rho\mu))^4$.

Percio' almeno uno dei termini

$$\rho^2\mu^2\Big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\Big)^2,\ c^2\Delta_0^2 M^2(\rho\mu)^4,\ V(\mu,\rho)M^2(\rho\mu)^4 \geq \frac{1}{3}\bar{c}M^2(\rho\mu)^4,$$

e la palla e' essenzialmente un rettangolo di dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$. (Nel caso sia $\rho^2\mu^2\Big(\xi_2^0 - M(b\mu/\sigma(\rho,\mu))\Big)^2 \geq \bar{c}M^2(\rho\mu)^4/3$, si ha $p_\rho^*(x_2,\xi_2^0) \sim M^2(\rho\mu)^4$.)

Suppongo ora che, per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ sia nonellittico-nondegenerato a causa di $\partial^2_{x_1}(\rho^2 p_1)$. Di nuovo si ottiene che $\delta_\nu \sim \rho\mu$.

Fisso ora $\bar{\xi}_2 \in \pi_{\xi_2}(W_\nu)$ per un tale ν. Poiche' $\rho^2 p_1$ e' un polinomio, facendone la media rispetto a x_1 su $\pi_{x_1}(Q_\nu^\natural \cap R)$ si ottiene che $p_\rho^*(x_2,\bar{\xi}_2) \sim M^2(\rho\mu)^4$, e quindi che

$$\max_{(x_2,\xi_2)\in R} p_\rho^*(x_2,\xi_2) \sim M^2(\rho\mu)^4.$$

Come prima si ha allora che la palla e' un rettangolo di dimensioni $\sim \rho \times \rho|\mu| \times M\rho|\mu|$.

Suppongo infine che , per un certo $\nu \in N$, $\rho^2 p_{1|Q_\nu}$ sia nonellittico-nondegenerato a causa di $\partial^2_{\xi_2}$. Allora la palla e' un rettangolo $\approx W$ (in questo caso, $\delta_\nu^2 \sim \partial^2_{\xi_2}(\rho^2 p_1)_{|Q_\nu} \sim \rho^2\mu^2$). Sia infatti $B = \{(x,\xi) \in Q;\ x_1 \in I_\rho\}$ e $N' = \{\nu;\ Q_\nu \cap B \neq \emptyset,\ \pi_{(x_2,\xi_2)}(Q_\nu) \cap Q_{\nu_0}^{2**} \neq \emptyset\}$. Allora si ha che, per ogni $\nu \in N'$, $\delta_\nu \sim \rho\mu$, e che

$$\rho^2 p_{1|Q_\nu \cap B}(x,\xi) = \rho^2 x_1^2\Big(\xi_2 - \frac{Mb}{x_1}\Big)^2.$$

Osserviamo che sappiamo gia' che

$$\pi_{x_1}\Big(B_p(\gamma^0,\rho)\Big) \subset I_\rho(x_1^0).$$

Un simbolo q subordinato a $\rho^2 p$ puo' essere scritto nella forma $q_1 + q_2$, con q_1 subordinato a $\rho^2\xi_1^2$, e q_2 subordinato a$\rho^2 p_1$. Poiche' p_ρ^* e' localizzabile alla scala $\rho\mu \times M\rho\mu$, e $\rho^2 p_1 \leq C p_\rho^*$, si ha che ($\Gamma$ e' una traiettoria subunitaria)

$$|\partial_{\xi_2} q\Big(\Gamma(t;\gamma^0)\Big)| \leq C\rho|\mu|.$$

Se denoto con Γ_2 la ξ−proiezione di Γ, si ha anche

$$|\partial_x q\Big(\Gamma(t;\gamma^0)\Big)| \leq C\Big(\Delta_0 M\rho|\mu| + \Big|\Gamma_2(t,\gamma^0) - \xi^0\Big|\Big).$$

Cio' prova (insieme ad un lemma di Gronwall) che anche in questo caso la palla e' un rettangolo:

$$B_p\big((x^0,\xi^0),\rho\big) \approx \{(x,\xi);\ |x_1 - x_1^0| \le \rho, |x_2 - x_2^0| \le \rho|\mu|,\ |\xi - \xi^0| \le \Delta_0 M\rho|\mu|\}.$$

Cio' conclude il **Caso (9).**

CASO (11). In questo caso si ha che $0 \in I_\rho(x_1^0)$, e che

$$p_\rho^*(x_2,\xi_2) \sim \rho^4\Big(\xi_2 - M\frac{b\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\Big)^2 + M^2 b^2 \rho^2 + \Big(\frac{|\xi_1^0|}{M}\Big)^4 M^2.$$

La $\xi-$altezza data dalla "good band" R e' ora

$$M\rho^2\Delta_0 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\bar{b}| + M\big(\bar{b^2} - \bar{b}^2\big)^{1/2}.$$

Notiamo che

$$B_{p_\rho^*}\big((x_2^0,\xi_2^0),1\big) \approx \{(x_2,\xi_2);\ |x_2 - x_2^0| \le \rho^2, |\xi_2 - \xi_2^0| \le M\rho^2\Delta_1\}, \tag{15}$$

con

$$M\rho^2\Delta_1 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0 - M\frac{b\mu}{\sigma(\mu,\rho)}| + Mb^{1/2}\rho^{1/2} \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$$

essendo, in questo caso,

$$M\frac{b\mu}{\sigma(\mu,\rho)} \sim \frac{Mb\mu}{\rho^2} = M\frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}}b^{1/2}\frac{\mu}{\rho^{1/2}} \le CMb^{1/2}\rho^{1/2}.$$

Inoltre $M\bar{b^2}^{1/2}, M\bar{b} \lesssim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$ (poiche' in questo caso $H_1(\rho) \le C$). Considero i seguenti due casi (la condizione di stop e' ora data da: $\mathrm{diam}_x Q_\nu \sim \Delta_0\rho^2$) :

(i) $M\rho^2\Delta_0 \gtrsim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$ (oppure $M\rho^2\Delta_0 \sim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$);

(ii) $M\rho^2\Delta_0 \lesssim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$.

Poiche' nel caso (i) $M\rho^2\Delta_0 \sim M\rho^2\Delta_0 + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$, si ha allora che

$$M\rho^2\Delta_0 \sim |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$$

(infatti $|\xi_2^0 - M\bar{b}| + Mb^{1/2}\rho^{1/2} \sim |\xi_2^0| + Mb^{1/2}\rho^{1/2}$), che e' comparabile al massimo possibile (dato in (15)). Percio' nel caso (i) la palla e' un rettangolo.

Nel caso (ii) si ha che $|\xi_1^0|, |\xi_2^0 - M\bar{b}| \lesssim Mb^{1/2}\rho^{1/2}$, da cui segue che $M\rho^2\Delta_1 \sim |\xi_2^0| + M\rho^{1/2}b^{1/2}$.

Considero ora le seguenti quantita':

$$(16)\ \sigma_1(p_\rho^*) := \max_{(x_2,\xi_2)\in R^2} p_\rho^*(x_2,\xi_2) \sim \rho^4\Big(|\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}|^2 + M^2\rho^4\Delta_0^2\Big) + M^2b^2\rho^2 \sim$$

$$\sim \rho^4(|\xi_1^0|^2 + |\xi_2^0|^2) + M^2b^2\rho^2 = (M\rho^4)^2\Big\{\big(\frac{|\xi_1^0|}{M\rho^2}\big)^2 + \big(\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2}\big)^2 + \frac{b^2}{\rho^6}\Big\},$$

e

$$(17)\sigma_2(p_\rho^*) := p_\rho^*(x_2,\xi_2^0) \sim \rho^4\Big(\xi_2^0 - \frac{Mb\mu}{\sigma(\mu,\rho)}\Big)^2 + M^2b^2\rho^2 \sim (M\rho^4)^2\Big\{\big(\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2}\big)^2 + \frac{b^2}{\rho^6}\Big\}.$$

Considero una decomposizione di C.Z. relativa a $\rho^2 p_1$. Sia $\hat{Q}$ un blocco di C.Z. tale che $(0,0) \in \hat{Q}$. Conseguentemente $\rho^2 p_{1|\hat{Q}}$ deve essere ellittico (nel presente caso (ii)) e dimensioni$(\hat{Q}) \sim (b\rho)^{1/2} \times M(b\rho)^{1/2}$. Posso supporre che sia $\xi_1^0 \in \pi_{\xi_1}(\hat{Q})$ (altrimenti saremmo nel caso (i) considerato sopra: sarebbe $|\xi_1^0| \sim M\rho^{1/2}b^{1/2}$ e percio' $M\rho^2\Delta_0 \sim M(b\rho)^{1/2}$).

Considero allora i casi seguenti:

(A) $|\xi_2^0| \geq CM(b\rho)^{1/2}$;

(B) $|\xi_2^0| \sim M(b\rho)^{1/2}$;

(C) $\xi_2^0 \in \pi_{\xi_2}(\hat{Q})$ (i.e. $|\xi_2^0| \leq CM(b\rho)^{1/2}$).

(A): in questo caso si ha

$$\sigma_1(p_\rho^*) \sim \sigma_2(p_\rho^*) \text{ e } M\rho^2\Delta_1 \sim |\xi_2^0|.$$

Poiche' $\rho^2 p_1$ e' un polinomio nonnegativo, si ha che $\exists \bar{x}_1 \in \frac{1}{8} I_\rho$ (per esempio) tale che

$$\rho^2 p_1(\bar{x}_1, x_2^0, \xi_2^0) \sim (M\rho^4)^2 (\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2})^2.$$

Esiste allora un intorno di $(\bar{x}_1, x_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0)$ di dimensioni

$$\frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2}\rho^2 \times M\rho^2 \frac{|\xi_2^0|}{M\rho^2}$$

sul quale $\rho^2 p_1 \sim (M\rho^4)^2(|\xi_2^0|/(M\rho^2))^2 = \rho^4 |\xi_2^0|^2$, da cui segue la possibilita' di muoversi, lungo traiettorie subunitarie, di un ordine comparabile a $|\xi_2^0|$ nelle variabili ξ, i.e. il massimo possibile. Percio' la palla e' essenzialmente un rettangolo:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi);\ |x_1 - x_1^0| \le \rho, |x_2 - x_2^0| \le \rho^2, |\xi - \xi^0| \le |\xi_2^0|\}.$$

(B): questo caso e' completamente analogo al caso (A).

(C): in questo caso si ha che $M\rho^2 \Delta_1 \sim M b^{1/2} \rho^{1/2}$ e' la massima $\xi-$altezza permessa. Poiche' ora $|\mu| \le \rho/3$, posso raggiungere $x_1 = 0$ al tempo $\frac{1}{3}$, e, usando l'ellitticita' di $\rho^2 p_{1|\hat{Q}}$, raggiungere tramite traiettorie subunitarie i punti di una regione di dimensioni

$$\sim \frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}}\rho^2 \times M\rho^2 \frac{b^{1/2}}{\rho^{3/2}}.$$

Allora la palla e' un rettangolo:

$$B_p(\gamma^0, \rho) \approx \{(x, \xi);\ |x_1 - x_1^0| \le \rho, |x_2 - x_2^0| \le \rho^2, |\xi - \xi^0| \le M b^{1/2} \rho^{1/2}\}.$$

Cio' conclude il **Caso (11).**

CASO (10). Questo caso da' $|\mu|$ come raggio critico.

Per completare la discussione, devo ancora considerare i seguenti casi (ricordo che $\rho \geq \rho_0$) :

$$\frac{1}{3}|\mu| \leq \rho_0 \leq |\mu|, \; |\mu| \leq \rho_0 \leq 3|\mu|, \; \rho_0 \geq 3|\mu|.$$

Nel primo caso le condizioni (9), (10) o (11) possono essere verificate, percio' valgono le conclusioni del **Caso (9)**, del **Caso (10)** e del **Caso (11)**.
Nel secondo caso la condizione (9) e' vuota, mentre (10) o (11) possono essere verificate, dalla qual cosa seguono le conclusioni del **Caso (10)** e del **Caso (11)**.
Nel terzo caso solo la condizione (11) vale, da cui segue la conclusione del **Caso (11)**.

Riassumendo si ha il seguente

Teorema.

(1) *Se* $\rho \leq |\mu|/3$ *la palla e' un rettangolo*:

$$B_{\rho^2 p}(\gamma^0, 1) \approx \{(x,\xi);\; |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho|\mu|, |\xi - \xi^0| \leq \Delta_0 M \rho |\mu|\}$$

con Δ_0 *dato da* (12);

(2) *se* $\rho \geq 3|\mu|$ *la palla e' un rettangolo*:

$$B_{\rho^2 p}(\gamma^0, 1) \approx \{(x,\xi);\; |x_1 - x_1^0| \leq \rho, |x_2 - x_2^0| \leq \rho^2, |\xi - \xi^0| \leq |\xi_1^0| + |\xi_2^0| + M b^{1/2} \rho^{1/2}\}.$$

Si ha quindi una "transizione" della geometria per:

$$\rho_{cr} \sim |\mu| = |x_1^0|.$$

Bibliografia.

[F] C.L.Fefferman, *The Uncertainty Principle*, Bull. of A.M.S. Vol.9, No.2 (1983).

[Fe-Ph]C.L.Fefferman and D.H.Phong, *The Uncertainty Principle and Sharp Gårding Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981).

[P1]A.Parmeggiani, *Subunit Balls for Symbols of Pseudodifferential Operators*, Princeton Doctoral Dissertation (1993).

[P2]A.Parmeggiani, *Microlocalizzazioni Sub-Unitarie di Operatori Pseudodifferenziali*, Seminario di Analisi Matematica, Universita' di Bologna, Tecnoprint Bologna (1993).

[P3]A.Parmeggiani, *Subunit Balls for Symbols of Pseudodifferential Operators*, preprint.